

Caos en un sistema láser en configuración anillo unidireccional.

Chaos in a laser system in unidirectional ring configuration.

Juan Hugo García López* (1).

Laboratorio de Óptica, Sistemas Complejos e Innovación, Departamento de Ciencias Exactas y Tecnología, Centro Universitario de los Lagos, Universidad de Guadalajara, Lagos de Moreno, 47463, Jalisco, México.

jhugo.garcia@academicos.udg.mx.

*corresponding author.

Artículo recibido en agosto 22, 2024; aceptado en septiembre 13, 2024.

Resumen.

Investigamos numéricamente la dinámica de un anillo de tres láseres de fibra dopada con erbio (EDLF) acoplados unidireccionalmente sin modulación de bombeo externo. Estudiamos el comportamiento del sistema utilizando un modelo de seis dimensiones que incluye las intensidades láser y las inversiones de población variando la fuerza de acoplamiento. Nuestro objetivo principal es comprender la evolución del sistema hacia el caos a partir de un equilibrio estable a medida que aumenta la fuerza de acoplamiento. El sistema sufre bifurcaciones de Hopf y toroide durante la transición al caos, y observamos la coexistencia de órbitas periódicas y caóticas dentro de rangos de acoplamiento específicos. Para un acoplamiento muy fuerte, esta biestabilidad se desvanece, lo que da lugar a un sistema monoestable con un solo ciclo límite, prometedor para aplicaciones que requieren pulsos láser cortos con una potencia máxima significativamente mejorada, especialmente en sistemas de comunicación óptica.

Palabras claves: Acoplamiento, anillo, dinámica, láser; multiestabilidad, red, sincronización.

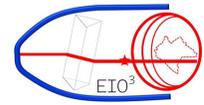
Abstract.

We numerically investigate the dynamics of a ring of three unidirectionally coupled Erbium-Doped Fiber Lasers (EDFLs) without external pump modulation. We study the system's behavior using a six-dimensional model that includes laser intensities and population inversions by varying the coupling strength. Our main goal is understanding the system's evolution towards chaos from a stable equilibrium as the coupling strength increases. The system undergoes Hopf and torus bifurcations during the transition to chaos, and we observe the coexistence of periodic and chaotic orbits within specific coupling ranges. For very strong coupling, this bistability vanishes, leading to a monostable system with a single limit cycle, promising for applications requiring short laser pulses with significantly enhanced peak power, especially in optical communication systems.

Keywords: Coupling, dynamics, laser, multistability, network, ring, synchronization.

1. Descripción de la conferencia.

Se presenta el estudio del modelo de un Láser de Fibra Dopado con Erblio (EDFL). Se muestran resultados del modelo, anillo de tres láseres acoplados unidireccionalmente, utilizando un sistema de ecuaciones diferenciales. Se presentan



resultados de la investigación sobre la dinámica del sistema, utilizando análisis de series temporales, diagramas de bifurcación, secciones de Poincaré, y el exponente de Lyapunov. Al final se presentan las conclusiones.

Para describir la dinámica de los EDFL bombeados por diodos, se emplea un enfoque de equilibrio de potencia, que explica la absorción de estado excitado (ESA) en el erbio a la longitud de onda de $1.5\mu\text{m}$. Este enfoque también considera el promedio de la inversión de la población a lo largo de la fibra activa bombeada (De La Torre-Esqueda et al., 2023). Al incorporar estos factores, el modelo captura los mecanismos subyacentes que dan lugar a oscilaciones intrínsecas en el láser, incluso sin modulación externa, como se observa experimentalmente (Pisarchik et al., 2003, Jaimes-Reategui et al., 2004).

2. Métodos.

2.1 Modelo Láser.

Las ecuaciones de equilibrio para la potencia del láser intracavidad, denotada por la suma de las potencias de las ondas que se propagan dentro de una cavidad láser y la inversión de población promediada de átomos entre un nivel de energía superior por decaimientos por la emisión espontánea y estimulada es ampliamente conocida y descrita. Por lo anterior en este artículo únicamente se presentan un modelo láser simplificado adimensional, los detalles del estudio pueden ser encontrados en el trabajo de Barba-Franco et al. (2023) y De La Torre-Esqueda et al. (2023).

El sistema de ecuaciones que describe un láser de fibra dopado con erbio se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\theta} &= ax_1y_1 - bx_1 + c(y_1 + r_w) & (1) \\ \frac{dy_1}{d\theta} &= -dx_1y_1 - (y_1 + r_w) + e \left\{ 1 - \exp \left[-\beta\alpha_0L \left(1 - \frac{y_1+r_w}{\xi_2r_w} \right) \right] \right\} & (2) \end{aligned}$$

donde las variables (x_1, y_1) representan la intensidad láser y la inversión de población respectivamente. Para los coeficientes del sistema se emplearon los valores siguientes: $a=6.6207e+7$, $b=7.4151e+6$, $c=0.0163$ y $d=4.07633+3$, proporcionados del estudio de Esqueda de la Torre (2023). Con el fin de simular la dinámica de un láser real, utilizamos parámetros que son cercanos a los empleados en el estudio experimental de Pisarchik et al. (2003). Al resolver numéricamente el sistema de Ecs. (1) y (2) utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, generamos series temporales. La serie temporal correspondiente a esta elección de parámetros se ilustra en la Fig.1. Es relevante señalar que la solución de este sistema sin bombeo externo produce un punto fijo estable.

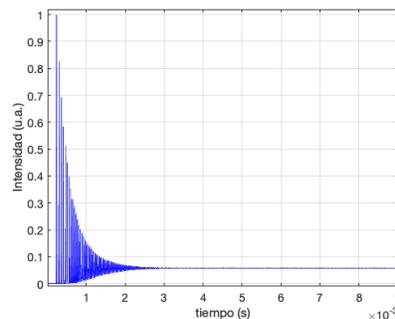
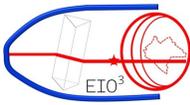


Figura 1. Serie temporal del LFDE, obtenida con las Ecs. (1) y (2).

2.2 Dinámica de un anillo de tres EDFL acoplados unidireccionalmente.

En este estudio, nos centramos en la configuración con acoplamiento unidireccional, como se muestra en la Fig. 2. Los láseres acoplados en anillo pueden conceptualizarse como un ciclo recurrente de interacciones según Alon, U. (2007). Incluso con solo tres osciladores, la red puede exhibir trece patrones de configuración distintos (Perlikowski et al.



2013), caracterizados por varias combinaciones de acoplamientos unidireccionales y bidireccionales. Cada láser actúa como esclavo y maestro simultáneamente. La dinámica del anillo de láseres estudiado se puede describir matemáticamente mediante dos ecuaciones diferenciales, donde x_j ($j = 1, 2, 3$) es la intensidad, mientras que y_j es la inversión de población para cada láser, como se muestran a continuación (Esqueda-De La Torre et al., 2023):

$$\frac{dx_j}{d\theta} = ax_jy_j - bx_j + c(y_j + 0.3075), \tag{3}$$

$$\frac{dy_j}{d\theta} = -dx_jy_j - (y_j + 0.3075) + P_{modj} \left\{ 1 - \exp \left[-18 \left(1 - \frac{y_j + 0.3075}{0.6150} \right) \right] \right\}, \tag{4}$$

$$P_{modj} = 506(1 + k(x_{j-1} - x_j)),$$

Donde k es el coeficiente de acoplamiento y P_{modj} actúa como el bombeo para el siguiente láser.

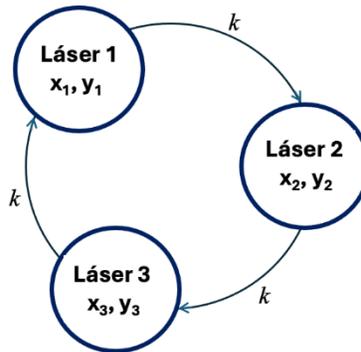


Figura 2. Diagrama esquemático de un anillo unidireccional de tres láseres acoplados difusivamente.

3. Desarrollo.

Utilizando la configuración de anillo para los tres láseres acoplados unidireccionalmente, por la simetría inherente, se encuentra que la dinámica de cada láser es idéntica. En la **Fig. 3**, se presenta el diagrama de bifurcación que muestra la amplitud máxima de un láser (x_1) y el exponente de Lyapunov en función de la fuerza de acoplamiento k . El escenario de bifurcación sigue la ruta de Landau, caracterizada por la transición de un equilibrio estable al caos a través de la cuasi-periodicidad a través de bifurcaciones sucesivas de Hopf (Borkowski et al., 2015a, Borkowski et al., 2015b). Este escenario revela que un atractor caótico emerge como un toroide tridimensional después de la tercera bifurcación de Hopf. Nuestro modelo, descrito por las Ecs. (3) y (4) exhiben un escenario similar, mostrando una transición a biestable con caos y punto fijo cuando se varía la fuerza de acoplamiento k llegando a un ciclo limite posteriormente.

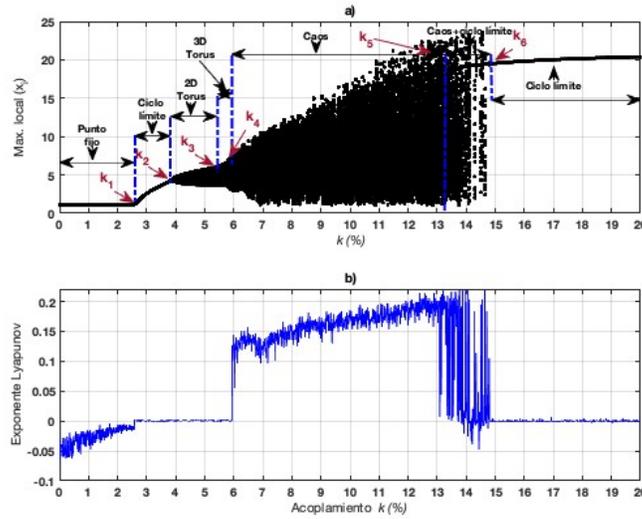
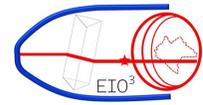


Figura 3. a) Diagrama de bifurcación de la intensidad láser y b) Exponente de Lyapunov como función del factor de acoplamiento (k).

En la **Fig. 4** se ilustran detalles de los regímenes dinámicos observados en la ruta caos iniciando desde un punto fijo estable hasta el caos, se presentan algunas series temporales y su respectiva sección de Poincaré. Utilizando a la para la **Fig. 3**, se observa que a medida que la fuerza de acoplamiento aumenta de $k = 0$ a $k_1 \approx 2.58$, el equilibrio se transforma en un ciclo límite (**Fig. 4 (a)**) en la bifurcación de Hopf, donde el mayor exponente de Lyapunov se aproxima a cero. El régimen periódico se mantiene dentro de una región relativamente pequeña de $2,58 < k < 3,81$. Luego, en $k_2 = 3.82$, el ciclo límite se transforma en un régimen cuasiperiódico (toroide 2D), como se muestra en la **Fig. 4 (b)**. La cuasi-periodicidad ocurre cuando el segundo exponente más grande de Lyapunov llega a cero. A medida que k se incrementa aún más, aparece un toroide 3D en $k_3 = 5.49$ (**Fig. 4 (c)**) cuando el tercer exponente de Lyapunov más grande se acerca a cero. Este régimen se observa para $5.49 < k < 5.83$. En $k_4 = 5.84$, el sistema se vuelve caótico (**Fig. 4 (d)**) cuando el mayor exponente de Lyapunov se vuelve positivo. Un aumento adicional en la fuerza de acoplamiento conduce a un ciclo límite estable en $k_6 > 14.81$ (**Fig. 4 (e)**) cuando el exponente de Lyapunov más grande se convierte en cero.

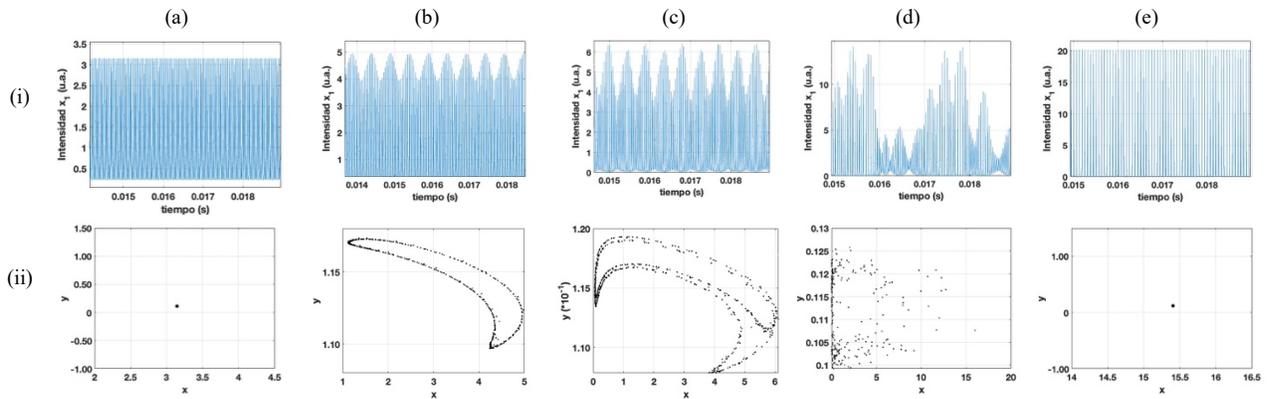


Figura 4. (i) Series Temporales y (ii) Secciones de Poincaré para (a) $k = 2.58$ (órbita periódica), (b) $k = 3.82$ (Toroide 2D), (c) $k = 5.49$ (Toroide 3D), (d) $k = 5.84$ (Caos) y (e) $k = 14.81$ (Ciclo límite).

Una característica interesante encontrada en los resultados es una onda rotante generada. Los modos oscilatorios en el anillo de láseres exhiben series temporales para la intensidad donde la única diferencia entre los osciladores láser es su fase, lo que resulta en cambios de fase en cada láser sucesivo. Esto produce una onda de fase que gira dentro del

anillo de LFDE. La dinámica de la onda rotante en el anillos de los láseres se representa en la **Fig. 5** para cuatro fuerzas de acoplamiento distintas: $k = 2.58$, $k = 3.82$, $k = 5.49$ y $k = 5.84$.

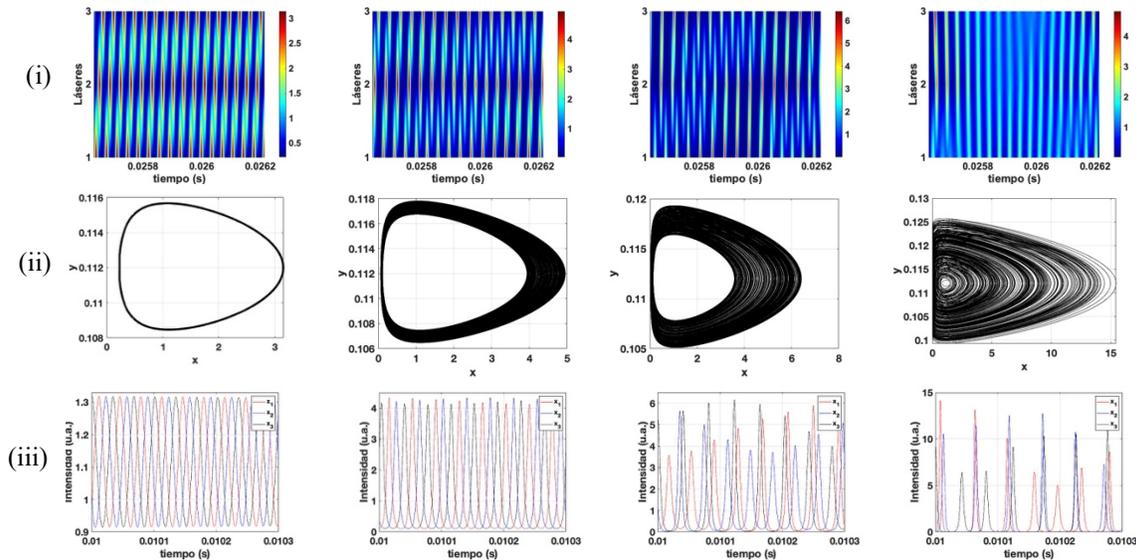


Figure 5. (i) Onda rotante, (ii) Espacio de fase y (iii) Series temporales para a) $k = 2.58$, b) $k = 3.82$, c) $k = 5.49$, y d) $k = 5.84$.

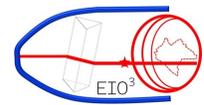
En la columna (i) de la **Fig. 5**, se presentan los patrones de series temporales de los tres láseres, mostrando franjas oblicuas que representan la onda rotate. Estas franjas indican la propagación de ondas de fase a lo largo del anillo. La columna (ii) de la misma figura ilustra los espacios de fase de los atractores correspondientes, que son iguales para todos los láseres debido a la simetría de la configuración. En particular, el tamaño del atractor aumenta a medida que aumenta la fuerza de acoplamiento. Las acercamiento de las respectivas series temporales de los tres sistemas láser se presentan en la columna (iii). Estas series temporales muestran la diferencia de fase entre los láseres como evidencia de la onda rotante.

Conclusiones.

Realizamos una investigación numérica sobre la dinámica de tres láseres EDFL acoplados unidireccionalmente en anillo, variando la fuerza de acoplamiento. Usamos un modelo matemático de seis ecuaciones diferenciales que considera la intensidad láser y la inversión de población. El análisis incluyó herramientas como diagramas de bifurcación y exponentes de Lyapunov para explorar la transición de punto de equilibrio estable a caos. Encontramos que, con un acoplamiento fuerte, la potencia máxima de los pulsos láser aumentó casi 20 veces por el bloqueo de fase, lo que tiene aplicaciones en sistemas de comunicación óptica. A pesar de que el estudio se limita a tres láseres, estos hallazgos son prometedores para posible aplicación a redes mayores, indicando nuevas oportunidades de investigación.

Créditos.

Trabajo de investigación del Cuerpo Académico Óptica, Sistemas Complejos e Innovación UDG-CA-1038, con los Drs. Jaimes-Reategui R. Huerta-Cuellar G. y José Octavio Esqueda de la Torre, quien obtuvo su grado de Doctor en Ciencias. Agradecemos el apoyo del proyecto 320597: Programa Presupuestario F003 CONACYT México Convocatoria “Ciencia Básica y/o Ciencia de Frontera. Modalidad: Paradigmas y Controversias de la Ciencia 2022”.



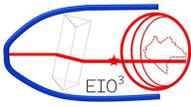
Referencias bibliográficas.

- Alon, U. (2007). Network motifs: theory and experimental approaches. *Nature Reviews Genetics*, 8, 450–461. <https://doi.org/10.1038/nrg2102>
- Barba-Franco, J., Romo-Muñoz, L., Jaimes-Reátegui, R., García-López, J., Huerta-Cuellar, G., & Pisarchik, A. (2023). Electronic equivalent of a pump-modulated erbium-doped fiber laser. *Integration*, 89, 106–113. <https://doi.org/10.1016/j.vlsi.2022.11.012>
- Borkowski, L., & Stefanski, A. (2015). FFT bifurcation analysis of routes to chaos via quasiperiodic solutions. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 1–12. <https://doi.org/10.1155/2015/367036>
- Borkowski, L., Perlikowski, P., Kapitaniak, T., & Stefanski, A. (2015). Experimental observation of three-frequency quasiperiodic solution in a ring of unidirectionally coupled oscillators. *Physical Review E*, 91, 062906. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062906>
- Esqueda de la Torre, J. O., García-López, J. H., Jaimes-Reátegui, R., Huerta-Cuellar, G., Aboites, V., & Pisarchik, A. N. (2023). Route to chaos in a unidirectional ring of three diffusively coupled erbium-doped fiber lasers. *Photonics*. <https://doi.org/10.3390/photonics10070813>
- Pisarchik, A. N., Barmenkov, Y. O., & Kir'yanov, A. V. (2003). Experimental characterization of the bifurcation structure in an erbium-doped fiber laser with pump modulation. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 39(12), 1567-1571.
- Perlikowski, P., Yanchuk, S., Wolfrum, M., Stefanski, A., & Kapitaniak, T. (2013). Dynamics of a large ring of unidirectionally coupled Duffing oscillators. In *Proceedings of the IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics for Advanced Technologies and Engineering Design* (pp. 63–72). Springer.
- Reátegui, R., Kir'yanov, A., Pisarchik, A., Barmenkov, Y. O., & Il'ichev, N. (2004). Experimental study and modeling of coexisting attractors and bifurcations in an erbium-doped fiber laser with diode-pump modulation. *Laser Physics*, 14(9), 1277-1281.

Biografía del investigador.



El Dr. **Juan Hugo García López**, nació en la ciudad de Comitán de Domínguez, Chiapas, México el 01 de Julio de 1973. En 2003 el Dr. García, obtuvo su **Doctorado en Ciencias** (Óptica) en el Centro de Investigaciones en Óptica A. C., posgrado reconocido en nivel competencia internacional, realizando su investigación doctoral en el Blackett Laboratory del Imperial College de la Universidad de Londres presentando su tesis sobre Láseres de estado sólido bombeados por diodos láser de alta potencia, obteniendo el reconocimiento de trabajo de grado “*LAUREADO*” por la Universidad de Guanajuato. El Dr. García obtuvo en 1999, la **Maestría en Ingeniería Eléctrica** (Instrumentación y Sistemas Digitales), en la Facultad de Ingeniería (FIMEE) de la Universidad de Guanajuato, posgrado también reconocido en nivel competencia internacional. Es miembro **SNII nivel I** del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores con No. 33760 y cuenta con reconocimiento de Profesor con **Perfil Deseable PRODEP** por la SEP, ambos desde el 2004, miembro del **Cuerpo Académico nivel Consolidado**, Óptica, Sistemas Complejos e Innovación, UDG CA-



1038, ha impartido más de 45 diferentes cursos de docencia. Cuenta con más de **65 artículos** con riguroso arbitraje, que tienen más de **550 citas**, ha participado en más de **50 congresos** o eventos académicos y tiene la coautoría y registro de las Patentes No. 311785 y No. 407815 en IMPI y No. P201930480 en OPEM. Desde el 2011 es **Profesor Investigador Titular C**, del 2009 al 2012 fue Jefe del Departamento y del 2012 al 2016 fue **Secretario Académico** del Centro Universitario de los Lagos de la Universidad de Guadalajara, es Jefe del Laboratorio de Óptica, Sistemas Complejos e Innovación de la Universidad de Guadalajara.